УДК 519.584

Уточнение экспертных оценок, выставленных в ранговых шкалах, с помощью измеряемых данных[1]

В. В. Стрижов, Вычислительный центр РАН

Описан способ построения интегральных индикаторов качества объектов с использованием экспертных оценок и измеряемых данных. Используются экспертные оценки качества объектов и важности показателей, которые корректируются в процессе вычисления. Предполагается, что экспертные оценки выставлены в ранговых шкалах. Каждый объект описан набором признаков в линейных шкалах. Рассматривается задача получения таких интегральных индикаторов, которые бы не противоречили ни описаниям объектов, ни экспертным оценкам. Предложен метод уточнения экспертных оценок. В корректировке оценок может принимать участие сам эксперт.

Ключевые слова: интегральные индикаторы, экспертные оценки, ранговые шкалы, линейные шкалы, регрессионный анализ.

Введение

Для принятия решений при администрировании объектов управления, например, государственных заповедников, регионов Российской Федерации или объектов финансирования часто используются интегральные оценки качества или оценки эффективности управления объектами [1–4]. «Качество — совокупность свойств объекта, обусловливающих его способность удовлетворять определенные потребности в соответствии с его назначением» [5]. Интегральный индикатор – число, поставленное в соответствие объекту, и рассматриваемое как оценка его качества.

При построении интегральных индикаторов, во-первых, выбирается критерий качества объектов [6]. «Критерий – признак, на основании которого производится оценка (например, оценка качества системы, её функционирования), сравнение альтернатив (т.е. эффективности различных решений), классификация объектов и явлений» [5]. Во-вторых, формируется набор объектов, сравнимых в контексте выбранного критерия. В-третьих, формируется набор из тех показателей, которые эксперт считает необходимыми для описания этого критерия. После этого составляется таблица «объект-признак». Предполагается, что в этой таблице нет объектов-выбросов (способы их обнаружения описаны в [6]) и пропущенных значений. Значения показателей приведены к единой шкале и соответствуют принципу «чем больше, тем лучше»: большему значению показателя (при прочих равных) соответствует большее значение интегрального индикатора. Предполагается, что мультиколлинеарность показателей отсутствует или невысока [7–9].

Ранее было предложено несколько подходов к построению интегральных индикаторов [10–14]. Подход «без учителя» заключается в нахождении интегральных индикаторов с помощью описаний объектов и выбранного метода их построения. Приведем в качестве примера построение интегрального индикатора методом главных компонент, согласно которому интегральный индикатор является проекцией векторов-описаний объектов на первую главную компоненту матрицы «объект-признак» [16–18]. Также в [19] рассматриваются такие методы построения интегральных индикаторов «без

[1]Работа поддержана грантом РФФИ 10-07-00422.

учителя» как Парето-расслоение и метрический метод.

Подход «с учителем» использует кроме описаний объектов экспертные оценки качества объектов или оценки важности показателей и заключается в нахождении компромисса между ними и вычисленными индикаторами. Ранее был предложен подход, в котором восстанавливается регрессия описаний объектов на экспертные оценки качества объектов [20]. Экспертные оценки могут быть выставлены в линейных или в ранговых шкалах. В работе [21] показано, что эксперты в некоторых случаях не могут выставить оценки в линейных шкалах. Поэтому данная работа посвящена уточнению экспертных оценок, выставленных в ранговых шкалах.

Предлагаемый метод заключается в следующем. Принята линейная модель зависимости интегрального индикатора от весов показателей. Экспертные оценки весов показателей задают выпуклый многогранный конус. Матрица «объект-признак» задает линейное отображение этого конуса из пространства показателей в пространство интегральных индикаторов. Полученный в результате отображения конус может пересекаться с конусом, заданным экспертными оценками интегрального индикатора. В этом случае экспертные оценки показателей и объектов считаются непротиворечивыми, и отыскивается наиболее устойчивый интегральный индикатор. В противном случае выполняется описанная ниже процедура рангового уточнения оценок.

Данный метод рассматривает оценки, выставленные одним экспертом. Если оценки выставлены группой экспертов, их следует привести к согласованному виду, описанному в [22], например, посредством вычисления медианы Кемени.

1. Задача построения интегральных индикаторов

Задана таблица описаний объектов — матрица $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{m,n}$, $A \in R^{m \times n}$. Элемент матрицы a_{ij} — значение j-го показателя i-го объекта. Вектор $\mathbf{a}_i = < a_{i1}, \ldots, a_{in} >$ — описание i-го объекта. Для краткости объектом далее будет называться непосредственно сам вектор $\mathbf{a}_i$.

Интегральный индикатор объекта — линейная комбинация вида

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} w_j g_j(a_{ij}), \tag{1}$$

где g_j — функция приведения показателей в единую шкалу:

$$g_j : a_{ij} \mapsto (-1)^{s_j} \frac{a_{ij} - \min_i a_{ij}}{\max_i a_{ij} - \min_i a_{ij}} + s_j. \tag{2}$$

Модификатор s_j назначается равным единице, если оптимальное значение j-го показателя минимально; и нулю, если оптимальное значение показателя максимально. Если знаменатель дроби (2) равен нулю для некоторых значений индекса j, то соответствующий признак исключается из дальнейшего рассмотрения. При выполнении условия (2) вектор интегральных индикаторов будет иметь вид

$$\mathbf{q} = A\mathbf{w},$$

где интегральные индикаторы $\mathbf{q} = < q_1, \ldots, q_m >^T$ и вектор весов важности показателей $\mathbf{w} = < w_1, \ldots, w_n >^T$. Для построения интегрального индикатора требуется найти веса важности показателей.

2. Построение интегрального индикатора «без учителя»

Нижеприведенные методы используют модель (1) и матрицу «объект-признак», удовлетворяющую условиям (2).

2.1. Метрический метод

Используется заданная метрика в пространстве столбцов матрицы A для вычисления расстояния от каждого объекта до гипотетического наилучшего объекта. Наилучшим объектом называется объект с максимальными значениями всех показателей. Интегральным индикатором q_i объекта $\mathbf{a}_i$ называется расстояние

$$q_i = \rho(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{\max}) = \frac{1}{m}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} - \max_{\xi=1,\dots,m} a_{\xi j})^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

При значении $r = +\infty$ интегральный индикатор объекта равен максимальному из его показателей. При значении $r = 1$ этот метод возвращает усредненные значения показателей.

2.2. Метод главных компонент

При вычислении интегральных индикаторов данным методом строятся такие проекции объектов на новую систему координат (называемую главными компонентами), что сумма квадратов расстояний от объектов до их проекций на первую главную компоненту была бы минимальной. Рассмотрим ортогональную матрицу W в линейной комбинации $Z^T = A^T W$ векторов-строк матрицы A, таких, что векторы-столбцы $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ матрицы Z имели бы максимальную сумму дисперсий,

$$\sum_{j=1}^{n}\sigma^2(\mathbf{z}_j) \to \max.$$

Здесь $\sigma^2(\mathbf{z}) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(z_i - \overline{z})^2$ и $\overline{z} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} z_i$. В [17,18] показано, что векторы-столбцы матрицы W есть собственные векторы ковариационной матрицы $\Sigma = A^T A$. Эта матрица может быть найдена с помощью сингулярного разложения матрицы $A^T A$. Так как $\Sigma = A^T A = W\Lambda^2 W^T$ (в сингулярном разложении матрицы U, W ортогональные, а матрица Λ диагональная с невозрастающими неотрицательными элементами), то $\Sigma W = W\Lambda$ является собственной системой матрицы ΣW.

Вектор интегральных индикаторов $\mathbf{q}_{\mathrm{PCA}} = A\mathbf{w}$ есть проекция векторов-строк матрицы A на первую главную компоненту, и $\mathbf{w}$ — первая вектор-строка матрицы W. Этот вектор соответствует максимальному собственному значению матрицы Σ.

3. Построение интегрального индикатора «с учителем»

Методы «с учителем» используют заданную модель (1), матрицу «объект-признак», экспертные оценки качества объектов $\mathbf{q}_0$ или экспертные оценки весов показателей $\mathbf{w}_0$. В данном разделе предполагается, что эти оценки выставлены в линейных шкалах: считается, над оценками допустимы операции линейной алгебры.

3.1. Взвешенная сумма

Согласно этому методу, вектор интегральных индикаторов вычисляется как линейная комбинация столбцов матрицы A,

$$\mathbf{q}_1 = A\mathbf{w}_0.$$

Основные недостатки этого метода в том, что при большой обусловленности матрицы A небольшое возмущение вектора экспертных оценок вызовет значительное изменение вектора интегральных индикаторов.

3.2. Экспертно-статистический метод

Пусть эксперт задал оценки вектора интегральных индикаторов $\mathbf{q}_0$ в линейных шкалах. Отыскиваются такие веса $\mathbf{w}$, которые доставляли бы минимум суммы квадратов невязок $A\mathbf{w}-\mathbf{q}_0$,

$$\mathbf{w}_1 = \arg\min_{\mathbf{w}\in R^n} \|A\mathbf{w}-\mathbf{q}_0\|^2.$$

Решение этой задачи получается методом наименьших квадратов, $\mathbf{w}_1 = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{q}_0$. Вектор интегральных индикаторов $\mathbf{q}_{\text{ESM}} = A\mathbf{w}_1$.

3.3. Уточнение экспертных оценок в линейных шкалах

Рассмотрим интегральные индикаторы $\mathbf{q}_1 = A\mathbf{w}_0$, вычисленные по экспертным оценкам весов показателей; рассмотрим веса показателей $\mathbf{w}_1 = A^+\mathbf{q}_0$, вычисленные по экспертным оценкам интегрального индикатора $\mathbf{q}_0$. Веса показателей вычисляются с помощью псевдообратного линейного отображения A^+, полученного с помощью сингулярного разложения [23, 24] матрицы A, $A^+ = W\Lambda U^T$. Другими словами, отображение A переводит вектор экспертных оценок показателей $\mathbf{w}_0$ в вектор $\mathbf{q}_1$. Псевдообратное отображение A^+ переводит вектор экспертных оценок объектов $\mathbf{q}_0$ в вектор $\mathbf{w}_1$. В общем случае вычисленные и выставленные интегральные индикаторы различны, $\mathbf{q}_1 \neq \mathbf{q}_0$. Также различны вычисленные и выставленные оценки показателей, $\mathbf{w}_1 \neq \mathbf{w}_0$.

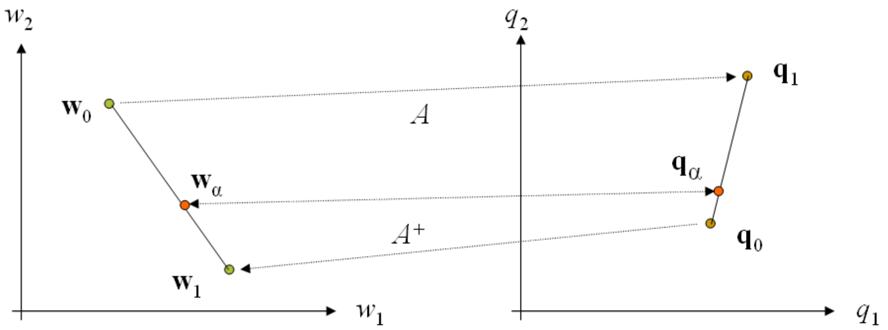

Рис. 1. Уточненные векторы $\mathbf{w}_\alpha$ и $\mathbf{q}_\alpha$ отыскиваются на отрезках $[\mathbf{w}_0,\mathbf{w}_1]$ и $[\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_0]$.

Для разрешения этого противоречия используются компромиссные оценки (см. рис. 1)

$$\mathbf{w}_\alpha \in [\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1] \quad \text{и} \quad \mathbf{q}_\alpha \in [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_0]. \tag{3}$$

Пара векторов $\mathbf{w}_\alpha, \mathbf{q}_\alpha$ для заданного α определена выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_\alpha &= \alpha\mathbf{w}_0 + (1-\alpha)A^+\mathbf{q}_0, \\ \mathbf{q}_\alpha &= (1-\alpha)\mathbf{q}_0 + \alpha A\mathbf{w}_0. \end{aligned} \tag{4}$$

Данное выражение доставляет пару уточненных экспертных оценок, для которых справедливо условие согласованности (6). Параметр α определяет предпочтение экспертных оценок. При $\alpha \to 0$ делается предпочтения оценкам объектов, при $\alpha \to 1$ — оценкам показателей. Параметр α может быть выставлен самим экспертом или найден как решение задачи минимизации сумм квадратов остатков

$$\frac{\|\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_\alpha\|}{n} + \frac{\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_\alpha\|}{m} \to \min. \tag{5}$$

При отказе от ограничений (3) и отыскании компромиссных оценок в окрестностях векторов $\mathbf{w}_0, \mathbf{q}_0$ (см. рис. 5), решается задача оптимизации (5) с регуляризирующим параметром γ^2. Перепишем эту задачу в виде

$$\mathbf{w}_\gamma = \arg\min_{\mathbf{w}\in R^n}(\varepsilon^2 - \gamma^2\delta^2),$$

где $\varepsilon^2 = \|\mathbf{w}-\mathbf{w}_0\|^2$ и $\delta^2 = \|A\mathbf{w}-\mathbf{q}_0\|^2$. Уточненные экспертные оценки, для которых справедливо условие (6), определены выражением

$$\mathbf{w}_\gamma = (A^T A + \gamma^2 I_n)^{-1}(A^T\mathbf{q}_0 + \gamma^2\mathbf{w}_0).$$

Здесь параметр γ^2, так же, как и параметр α, определяет доверие экспертным оценкам объектов, либо экспертным оценкам показателей.

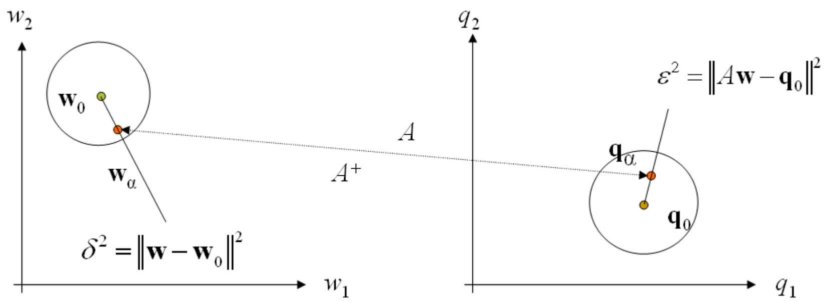

Рис. 2. Уточненные векторы $\mathbf{w}_\gamma$ и $\mathbf{q}_\gamma$ отыскиваются в окрестностях векторов $\mathbf{w}_0$ и $\mathbf{q}_0$.

4. Уточнение экспертных оценок в ранговых шкалах

В данной работе предполагается, что эксперт выставляет оценки качества объектов и важности показателей в ранговых шкалах: считается, что на множестве оценок задан линейный порядок. Предлагаемый метод базируется на идеях метода уточнения экспертных оценок, выставленных в линейных шкалах. Согласно этому методу, интегральные индикаторы объектов можно оценить двумя путями: непосредственно через экспертную оценку $\mathbf{q}_0$ и через взвешенную сумму значений показателей объектов $\mathbf{q}_1 = A\mathbf{w}_0$, где веса являются экспертными оценками показателей. В общем случае оценки $\mathbf{q}_0$ и $\mathbf{q}_1$ различны. Требуется построить интегральные индикаторы, основанные на измеряемых данных и не противоречащие оценкам экспертов, см. выражение (6) в следующем разделе.

4.1. Постановка задачи

Согласованными значениями интегральных индикаторов и весов показателей называются такие векторы $\mathbf{q}$ и $\mathbf{w}$, при которых выполняются условия

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= A\mathbf{w}, \\ \mathbf{w} &= A^+\mathbf{q}, \end{aligned} \tag{6}$$

где A^+ — линейное отображение, псевдообратное отображению A, такое, что $AA^+A = A$, $A^+AA^+ = A^+$ и $(AA^+)^T = AA^+$, $(A^+A)^T = A^+A$. Задачей предлагаемого метода является такое уточнение экспертных оценок, которое соответствовало бы условию (6).

Заданы экспертные оценки $\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0$, допускающие произвольные монотонные преобразования. Задана матрица описаний объектов $A \in R^{m\times n}$, удовлетворяющая условию (2). Без ограничения общности будем считать, что на наборах экспертных оценок введено отношение порядка такое, что

$$q_1 \ge q_2 \ge \ldots \ge q_m \ge 0 \text{ и } w_1 \ge w_2 \ge \ldots \ge w_m \ge 0 \tag{7}$$

Для выполнения этого условия достаточно переставить элементы векторов $\mathbf{q}_0$, $\mathbf{w}_0$ и соответствующие им строки и столбцы матрицы A местами.

Условие (7) представимо в виде системы линейных неравенств (приведены только оценки интегральных индикаторов)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \ldots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{pmatrix} \geq 0.$$

Обозначим двухдиагональную матрицу J и перепишем (7) в виде

$$J_m \mathbf{q} \geq 0 \text{ и } J_n \mathbf{w} \geq 0.$$

Число строк квадратной матрицы J равно числу неравенств в системе, а число элементов каждой строки равно числу элементов вектора ($\mathbf{q}$ или $\mathbf{w}$).

Обозначим конусы, заданные экспертными оценками в пространстве интегральных индикаторов и в пространстве весов показателей, соотвественно Q и W:

$$\begin{aligned} Q &= \{\mathbf{q} \mid J_m \mathbf{q} \geq 0\}, \\ W &= \{\mathbf{w} \mid J_n \mathbf{w} \geq 0\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Нижний индекс 0, указывающий на то, что оценка поставлена экспертом, опущен, так как векторы $\mathbf{q}, \mathbf{w}$ рассматриваются как произвольные элементы множеств.

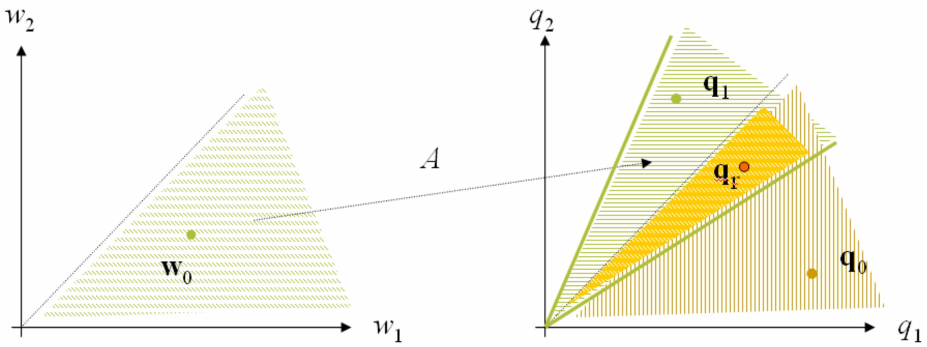

Рис. 3. Линейное отображение A переводит выпуклый многогранный конус экспертных оценок показателей в пространство интегральных индикаторов.

Линейное отображение A переводит конус $W \ni \mathbf{w}_0$ экспертных оценок показателей (8) в вычисленный конус $AW = P \ni \mathbf{w}_1$ (см. рис. 3):

$$A : W \to P,$$

$$A : \mathbf{w}_0 \mapsto \mathbf{q}_1.$$

Рассмотрим следующие варианты:

1. конусы P и Q пересекаются, в этом случае экспертные оценки считаются согласованными, и найдется такая пара $\mathbf{q}_p \in P \cup Q, \mathbf{w}_p = A^{+}\mathbf{q}_p \in W$, которая удовлетворяет условию согласованности (6);
2. пересечение конусов P и Q пусто, в этом случае требуется уточнение экспертных оценок.

Эти варианты рассмотрены разделах 4.3, 4.4.

4.2. Отображение и пересечение многогранных конусов

Для обоснования предложенных ниже методов приведем некоторые свойства конусов. Множество точек Q в R^m называется *конусом*, если для любой точки $\mathbf{q} \in Q$ точка $\lambda\mathbf{q}$ также принадлежит Q. *Выпуклым многогранным конусом* называется пересечение конечного числа полупространств (геометрических мест точек, заданных линейными неравенствами), граничные плоскости которых проходят через общую точку. Эта точка называется *вершиной конуса*.

Выпуклый многогранный конус с вершиной в начале координат — это область решений системы однородных неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}w_1 & + & a_{12}w_2 & + & \dots & + & a_{1n}w_n & \geq & 0, \\ a_{21}w_1 & + & a_{22}w_2 & + & \dots & + & a_{2n}w_n & \geq & 0, \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{m1}w_1 & + & a_{m2}w_2 & + & \dots & + & a_{mn}w_n & \geq & 0. \end{cases}$$

Согласно приведенному определению, система неравенств $J_n\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ задает многогранный конус.

Непосредственно из этого следует утверждение: пересечение многогранных конусов с вершиной в начале координат является многогранным конусом. Действительно, рассмотрим два многогранных конуса. Выпуклый многогранный конус с вершиной в начале координат — это область решения некоторой системы однородных неравенств. Пусть первому конусу соответствует система неравенств $A_1\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$, а второму – $A_2\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$. Пересечение двух конусов — область решений системы, составленной из неравенств обеих систем, соответствующих конусам. Другими словами, пересечение двух данных конусов задается системой однородных неравенств с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}.$$

Утверждение: множество W всех векторов $\mathbf{w} = \langle w_1, \dots, w_n \rangle^T$, удовлетворяющих условиям $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n \geq 0$, является конусом. Действительно, если вектор $\mathbf{w}$ принадлежит множеству W, то для любого $\lambda \geq 0$ справедливо неравенство $\lambda w_1 \geq \lambda w_2 \geq \dots \geq \lambda w_n \geq 0$, поэтому вектор $\lambda\mathbf{w}$ также принадлежит множеству векторов W.

Утверждение: геометрическое место точек, в которое отображение $A: W \to Q$ переводит конус, является конусом. Действительно, для любого вектора $\mathbf{w}$, принадлежащего конусу W, вектор $\lambda\mathbf{w}$ также ему принадлежит, а $\mathbf{q} = A\mathbf{w}$. Поэтому, если вектор $\mathbf{q}$ принадлежит рассматриваемому геометрическому месту точек, то и вектор $\lambda\mathbf{q} = \lambda A\mathbf{w} = A(\lambda\mathbf{w})$ ему принадлежит.

Таким образом, если W – многогранный конус, то отображение A переводит его в многогранный конус $P = AW$. Соответствующее псевдообратное отображение A^+ переводит конус W в конус A^+W.

Утверждение: если конусы, задаваемые в пространстве интегральных индикаторов системами линейных неравенств $B_1\mathbf{q} \geq 0$ и $B_2\mathbf{q} \geq 0$, пересекаются, то их отображение в пространстве весов показателей тоже пересекаются. Действительно, рассмотрим отображение $AW \to Q$. Так как по условию теоремы конусы пересекаются, то найдется вектор $\mathbf{q}$, такой что $(B_1A)\mathbf{w} \geq 0$ и $(B_2A)\mathbf{w} \geq 0$, то есть, конусы в пространстве W тоже пересекаются.

В контексте рассматриваемой задачи, если в пространстве интегральных индикаторов многогранные конусы, задаваемые неравенствами $J_m\mathbf{q} \geq 0$ и $AJ_n\mathbf{w} \geq 0$, пересекаются, то их псевдообратные отображения в пространство весов показателей $A^+J_m\mathbf{q} \geq 0$ и $J_n\mathbf{w} \geq 0$, тоже пересекаются. Обозначим пересечения конусов в соответствующих пространствах как $W_p = W \cup A^+Q$ и $Q_p = Q \cup AW$.

Если конус Q_p не пуст, то не пуст также и конус W_p. В противном случае оба конуса

пусты. Действительно, пусть конус Q_p не пуст, значит, существует вектор $\mathbf{q}_p$ такой, что принадлежит конусам Q и AW одновременно. Покажем что конус W_p не пуст. Рассмотрим векторы $\mathbf{q}_p = A\mathbf{w}_p \in Q_p$ и $\mathbf{w}_p = A^{+}\mathbf{q}_p W_p$. Линейное отображение A^{+} переводит конус Q в конус $A^{+}Q$. Векторы $\mathbf{q} \in AW$, вектор $\mathbf{w}_p \in W$ (линейное отображение $A: W \to AW$). Таким образом, вектор $\mathbf{w}_p$ принадлежит конусу W_p — пересечению конусов W и $A^{+}Q$.
Пусть теперь конус Q_p пуст. Покажем от противного, что конус W_p также пуст. Если это не так, то существует вектор $\mathbf{w}_p$, одновременно принадлежащий конусам W и $A^{+}Q$. Рассмотрим вектор $\mathbf{q}_p = A\mathbf{w}_p$. Аналогичными рассуждениями приходим к выводу, что вектор $\mathbf{q}_p$ принадлежит конусам Q и AW, то есть конусу Q_p. То есть, конус Q_p не пуст.

Доказанное утверждение эквивалентно следующему: для каждого вектора $\mathbf{w}_p$, принадлежащего конусу W_p, найдется согласованный с ним вектор $\mathbf{q}_p \in Q_p$, такой, что выполняются условия (6).
Для отыскания пресечения конусов Q_p опишем соответствующие множества системами линейных неравенств. Представим конус Q_p, элементы которого удовлетворяют условию (7) в виде двухдиагональной матрицы Q_0, в которой элементы на главной диагонали равны 1, а элементы на диагонали $(1,2),\dots,(n-1,n)$ равны -1. Представим отображение (AW) также в виде матрицы коэффициентов в пространстве $R^{m\times m}$. Множество векторов $Q_p \ni \mathbf{q}_p$ является решением объединенной системы линейных неравенств

$$\begin{cases} Q\mathbf{q} & \geq & 0, \\ (AW)\mathbf{q} & \geq & 0. \end{cases} \tag{9}$$

Полученное пересечение Q_p также является конусом (возможно, тривиальным), каждый элемент которого является вектором интегральных индикаторов, удовлетворяющим условию согласованности (6).

4.3. Уточнение оценок в случае непересекающихся конусов

В случае пустого пересечения конусов $Q_p = Q \cap AW$ и $W_p = W \cap A^{+}Q$ предлагается использовать модифицированный метод уточнения экспертных в линейных шкалах. В пространстве интегральных индикаторов рассмотрим лучи, заданные векторами $\mathbf{q} \in Q$ и $\mathbf{p} \in P = AW$. Найдем ближайшие друг к другу лучи на ребрах или гранях конусов Q, P,

$$\cos(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{q}^T\mathbf{p}}{\|\mathbf{q}\|\|\mathbf{p}\|} \to \max.$$

и выполним процедуру уточнения (4) на точках, задающих эти лучи. Отыскиваемая пара $\mathbf{q},\mathbf{p}$ должна выполнять следующие условия:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \mathbf{q}^T\mathbf{p} \\ \text{subject to} & \mathbf{q}^T\mathbf{q} = 1, \quad \mathbf{p}^T\mathbf{p} = 1, \\ & J_n\mathbf{q} \geq 0 \quad AJ_m\mathbf{p} \geq 0. \end{array}$$

Последовательно найдем приближения векторов $\mathbf{q}^{(2k)},\mathbf{p}^{(2k+1)}$ на четном и нечетном шаге.

Векторы $\mathbf{x} = \mathbf{q}^{(2k)}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{p}^{(2k+1)}$ будем считать решениями двух последовательно решаемых оптимизационных задач, полагая произвольным вектор $\mathbf{p}^{(0)} \in P$ на шаге $k = 0$.

Задача $2k$:	Задача $2k+1$:
maximize $\mathbf{x}^T \mathbf{p}^{(2k)}$	maximize $\mathbf{q}^{T(2k+1)} \mathbf{y}$
subject to $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1$,	subject to $\mathbf{y}^T \mathbf{y} = 1$,
$J_n \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.	$AJ_m \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$.

При решении задач, на каждом шаге значение констант $\mathbf{p}^{(2k)}$ и $\mathbf{q}^{(2k+1)}$ принимается равным значениям соответствующих решений $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ предыдущего шага. Так как максимизируемые функции и ограничения обеих задач являются выпуклыми, то решение будет найдено за счетное число шагов. Методы выпуклой оптимизации, используемые для получения численных решений, хорошо исследованы и описаны, например, в [25,26].

Получив решения задачи — векторы $\hat{\mathbf{p}}$ и $\hat{\mathbf{q}}$, выполняем процедуру линейного уточнения оценок вектора интегральных индикаторов

$$\mathbf{q}_\alpha = (1-\alpha)\hat{\mathbf{p}} + \alpha\hat{\mathbf{q}},$$

при условии существования нетривиального решения $\mathbf{q}_\alpha$, то есть, $\hat{\mathbf{p}}^T \hat{\mathbf{q}} \neq -1$. Как было показано ранее, вектор $\mathbf{q}_\alpha$ и соответствующий ему вектор $\mathbf{w}_\alpha = A^+ \mathbf{q}_\alpha$ удовлетворяют условию согласованности (6). Эти векторы задают в соответствующих пространствах конусы W и Q, причем пересечение $W_p = AW \cap Q$ не пусто. Так же, как и в случае уточнения оценок у линейных шкалах, при значении параметра $\alpha \to 0$, предпочтение отдается экспертным оценкам качества объектов. При $\alpha \to 1$ предпочтение отдается экспертным оценкам важности показателей.

В следующем разделе показано, как по уточненным оценкам, выставленным в ранговых шкалах, можно получить оценки в линейных шкалах.

4.4. Интегральные индикаторы, устойчивые к возмущению матрицы описаний

Рассмотрим найденный конус Q_p и матрицу «объект-показатель» A. Возмутим элементы этой матрицы, $A = A + \Delta$, принимая гипотезу нормального распределения матрицы $\Delta = \delta I$, $\delta \approx N(0, \sigma^2)$. Образ линейного отображения $\mathbf{q} = (A + \Delta)\mathbf{w}$ будет также иметь нормальное распределение. Согласно принятой гипотезе, будем считать устойчивым к малому возмущению матрицы A такой вектор $\mathbf{q}_p$, который наиболее удален от всех граней конуса Q_p при условии нормировки $\|\mathbf{q}_p\| = 1$. Вектор $\mathbf{q}_p$ является центром сферы, вписанной в конус Q_p, и называется точкой Чебшёва.

Расстояние от искомого вектора $\mathbf{q}_p$ до граней $\mathbf{b}$ конуса отыскивается как решение оптимизационной задачи

$$\mathbf{q}_p^* = \arg\max_{\mathbf{q}_p \in Q_p} \left\{ \|\mathbf{q}_p - \mathbf{b}\|^2 : \mathbf{b} \in R^m \setminus Q_p, \|\mathbf{q}_p\|^2 \leq 1 \right\}$$

Рассмотрим систему из L линейных неравенств (7), решение которой задает конус Q_p. Обозначим $\mathbf{s}_\ell$ — вектор нормали, соответствующий строке с номером ℓ этой системы. Скалярное произведение $\mathbf{x}^T \mathbf{s}_\ell = 0$ задает плоскость в пространстве интегральных индикаторов, проходящую через начало координат. Расстояние d от вектора $\mathbf{q}_p$ до этой плоскости равно

$$d(\mathbf{q}_p, \mathbf{s}_\ell) = \frac{\mathbf{q}_p^T \mathbf{s}_\ell}{\|\mathbf{s}_\ell\|}.$$

Эта задача является задачей выпуклой оптимизации и представима в виде

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \inf\limits_{\ell=1,..,L} \left(\mathbf{x}^T \mathbf{s}_\ell \|\mathbf{s}_\ell\|^{-1} \right) \\ \text{subject to} & \mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1, \\ & J_n \mathbf{x} \geq 0, \\ & A J_m \mathbf{x} \geq 0. \end{array}$$

Методы выпуклой оптимизации, используемые для численного решения данной задачи, описаны в [25, 27]. Результат решения — вектор $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{q}_p$ и вычисленный вектор весов показателей $\mathbf{w}_p = A^+ \mathbf{q}_p$ являются согласованными. Они получены с помощью экспертных оценок, выставленных в ранговых шкалах, и могут быть использованы для построения интегральных индикаторов в линейных шкалах.

4.5. Получение экспертных оценок

Для проверки непротиворечивости выставленных экспертных оценок рекомендуется выполнить процедуру парного сравнения. На множестве объектов или на множестве показателей экспертом задается отношение частичного порядка $\rho(q_i, q_j)$, такое, что

$$\rho_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{if} \quad q_i \succ q_j, \\ -1 & \text{if} \quad q_i \prec q_j, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Антисимметричная матрица $R = \{\rho_{ij}\}_{i,j=1}^m$ задает направленный граф, в котором узлами являются объекты. Направление ребер задано элементами матрицы. В случае обнаружения петель в графе (например, петель вида $q_i \succ q_j \succ q_k \succ q_i$) требуется пересмотреть экспертные оценки с целью исключения петель. Экспертная оценка q_i в ранговой шкале есть число ребер, исходящей из i-й вершины графа.

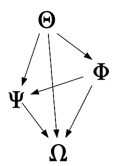

Рис. 4. Пример графа, построенного по матрице парных предпочтений *R*.

В качестве примера приведем сравнение четырех объектов: $\{\Theta, \Phi, \Omega, \Psi\}$. Пусть матрица парных экспертных предпочтений R задана как

$$\begin{array}{ccccc} & \Theta & \Phi & \Omega & \Psi \\ \Theta & 0 & +1 & +1 & +1 \\ \Phi & -1 & 0 & +1 & +1. \\ \Omega & -1 & -1 & 0 & -1 \\ \Psi & -1 & -1 & +1 & 0 \end{array}$$

Тогда граф, соответствующий этой матрице, будет выглядеть как на рис. 4, а вектор экспертных оценок $\mathbf{q}_0 = \langle q_1, \ldots, q_4 \rangle^T = \langle 3, 2, 0, 1 \rangle^T$.

При попадании несравнимых объектов в один класс эквивалентности число неравенств в линейной системе (9) сокращается: исключается строка с номером i, где $i, i+1$ — номера линейно упорядоченных объектов, отнесенных экспертом в один класс. Процедура уточнения экспертных оценок при этом остается неизменной.

Заключение

Предложен метод уточнения экспертных оценок, выставленных в ранговых шкалах. Метод использует одновременно как описания объектов, так и экспертные оценки. Предполагается, что эксперт имеет собственное мнение, не построенное только на основании измеряемых данных. Это мнение базируется на личном опыте и на знаниях, приобретенных в процессе работы. Свое мнение эксперт отражают в специально приготовленной анкете и в комментариях к ней.

Считая описания объектов точными, мы корректируем экспертные оценки таким образом, чтобы они не противоречили вычисленным, с помощью заданной модели, интегральным индикаторам. Для решения задачи выбрана линейная модель. Такая модель, во-первых, интуитивно понятна экспертам и, во-вторых, результаты, полученные с помощью этой модели объяснимы с их точки зрения.

Полученные процедуры используются в задачах принятия решения при построении индикаторов качества в экономике, социологии и экологии. В частности, эти процедуры использованы для уточнения экспертных оценок в различных прикладных задачах [28–31].

Литература

[1] *Гафт М. Г.* Принятие решений при многих критериях.— М.: Знание, 1979.

[2] *Гафт М. Г., Подиновский В. В.* О построении решающих правил в задачах принятия решений // *Автоматика и телемеханика*. — 1981.— № 6.— С. 128–138.

[3] *Емельянов С. В., Ларичев О. И.* Многокритериальные методы принятия решений. — М.: Знание, 1985.

[4] *Ларичев О. И.* Наука и искусство принятия решений. — М.: Наука, 1979.

[5] *Лопатников Л. И.* Экономико-математический словарь: Словарь современной экономической науки. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Дело, 2003.

[6] *Азгальдов Г. Г.* Теория и практика оценки качества товаров (основы квалиметрии). — М.: Экономика, 1982.

[7] *Стрижов В. В., Казакова Т. В.* Устойчивые интегральные индикаторы с выбором опорного множества описаний // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. — 2007. — № 7. — С. 72–76.

[8] *Draper N. R., Smith H.* Appied Regression Analysis. — John Wihley and Sons, 1998.

[9] *Belsley D. A.* Conditioning Diagnostics: Collinearity and Weak Data in Reggression. — New York: John Wiley and Sons, 1991.

[10] *Marquardt D. W.* Generalized inverses, ridge regression, biased linear estimation, and nonlinear estimation // *Technometrics*. — 1996. — Vol. 12 (3). — Pp. 605–607.

[11] *Ларичев О. И., Мошкович Е. М.* Качественные методы принятия решений. — М.: Физматлит, 1996.

[12] *Миркин Б. Г.* Проблема группового выбора. — М.: Наука, 1974.

[13] *Подиновский В. В.* Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности критериями // *Автоматика и телемеханика*. — 1976. — № 11. — С. 118–127.

[14] *Зубаревич Н. В., Тикунов В. С., Крепец В. В., Стрижов В. В., Шакин В. В.* Многовариантные методы интегральной оценки развития человеческого потенциала в регионах российской федерации // ГИС для устойчивого развития территорий. Материалы Международной конференции. — Петропавловск-Камчатский: 2001. — С. 84–105.

[15] *Глотов В. А., Павельев В. В.* Векторная стратификация. — М.: Наука, 1984.

[16] Jolliffe I. T. Principal Component Analysis. — Springer, 2002.
[17] *Isenmann A. J.* Modern multivariate statistical techniques. — Springer, 2008.
[18] *Рао С. Р.* Линейные статистические методы и их применения. — М.: Наука, 1968.
[19] *Strijov V. V., Shakin V. V.* Index construction: the expert-statistical method // *Environmental research, engineering and management*. — 2003. — Vol. 26 (4). — Pp. 51–55.
[20] *Стрижов В. В.* Уточнение экспертных оценок с помощью измеряемых данных // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. — 2006. — № 7. — С. 59–64.
[21] *Орлов А.И.* Экспертные оценки. Учебное пособие. — М.: 2002.
[22] *Литвак Б. Г.* Экспертная информация: методы получения и анализа. — М.: Радио и связь, 1981.
[23] *Стрижов В. В.* Методы индуктивного порождения регрессионных моделей. — М.: ВЦ РАН, 2008.
[24] *Голуб Д., Ван-Лоан Ч.* Матричные вычисления. — М.: Мир, 1999.
[25] *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex Optimization. — Cambridge University Press, 2009.
[26] *Мину М.* Математическое программирование. Теория и алгоритмы. — М.: Мир, 1990.
[27] *Dattorro J.* Convex Optimization & Euclidean Distance Geometry. — Meboo Publishing, 2005.
[28] *Molak V., Shakin V. V., Strijov V. V.* Kyoto index for the power plants in the usa // The 3-rd Moscow International Conference On Operations Research (ORM2001). — Moscow: Computing Center of the Russian Academy of Sciences: 2001. — P. 80.
[29] *Стрижов В. В.* Согласование экспертных оценок для биосистем в экстремальных условиях. — М.: ВЦ РАН, 2002.
[30] *Стрижов В. В.* Модель управления особо охраняемыми природными территориями // *Актуальные проблемы современной науки*. — 2005. — № 5. — С. 79–84.
[31] *Strijov V. V., Granic G., Juric Z., Jelavic B.* Integral indicator of ecological footprint for croatian power plants // HED Energy Forum «Quo Vadis Energija in Times of Climate Change», Zagreb, Croatia. — 2009. P. 49.