

**СОГЛАСОВАНИЕ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК  
ПРИ ПОСТРОЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ  
ИНДИКАТОРОВ**

**В. В. Стрижов**

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН

Заданы множество объектов и множество показателей. Каждый объект можно оценить двумя путями: через экспертную оценку объекта и через линейную комбинацию значений показателей объекта, где веса определяются экспертными оценками показателей. В общем случае эти оценки различны.

Описан метод, позволяющий получить непротиворечивые оценки объектов и показателей.

$\Upsilon = \{v_1, \dots, v_m\}$  — множество объектов,

$\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$  — множество показателей,

$A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{m,n}$  — исходные данные,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,

$\mathbf{q} = \langle q_1, \dots, q_m \rangle^T : \mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$  —

вектор интегральных индикаторов объектов,

$\mathbf{w} = \langle w_1, \dots, w_n \rangle^T : \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  —

вектор весов показателей.

Интегральным индикатором объекта  $v_i \in \Upsilon$  с номером  $i$  называется скаляр  $q_i \in \mathbb{R}^1$ , поставленный в соответствие набору  $\mathbf{a}_i \langle a_{i1}, \dots, a_{in} \rangle : \mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$  описаний объекта.

Требуется найти такие коэффициенты  $C = \{c_{ij}\}_{i,j}^{n,n}$ , что линейные комбинации векторов  $\mathbf{z}_i = \tilde{A}\mathbf{c}_i$  обладали бы наибольшей дисперсией

$$\max \left( \frac{D\mathbf{z}_1 + D\mathbf{z}_2 + \dots + D\mathbf{z}_n}{D\tilde{\mathbf{a}}_1 + D\tilde{\mathbf{a}}_2 + \dots + D\tilde{\mathbf{a}}_n} \right), \quad i = 1, \dots, n$$

при ограничениях нормировки  $\sum_{i=1}^m c_{ij}^2 = 1, j = 1, \dots, n$

и  $\sum_{i=1}^m c_{ij}c_{ik} = 0, j, k = 1, \dots, n, j \neq k$ .

Интегральный индикатор  $\mathbf{q}_1 = \tilde{A}\mathbf{c}_1$ .

Представим описания  $S = \{\mathbf{a}_i : i \in \{1, \dots, m\}\}$  в виде  $T = \bigcup_{\zeta=1}^l S_\zeta$ ,  $S_\zeta \cap S_\eta = \emptyset$ , если  $\zeta \neq \eta$ .

Определим для всех  $\zeta = 1, \dots, l$  множество  $S_\zeta$  как

$$S_\zeta = \{\mathbf{a}_\xi : \mathbf{a}_\xi \notin S_{\zeta-1}, \forall i \in \{1, \dots, m\},$$

$$i \neq \xi \exists j \in \{1, \dots, n\} : a_{\xi j} \geq a_{ij}\}_{\xi=1}^m.$$

Поставим в соответствие каждому вектору  $\mathbf{a}_\xi \in S_\zeta$  индекс  $\zeta$ . Полученное множество приведем к виду

$$\mathbf{q}_2 = \{\max(\{\zeta_\xi\}_{\xi=1}^m) - \zeta_\xi\}_{\xi=1}^m.$$

# Исходные данные — тройка $(\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0, A)$

C-7

Экспертами заданы векторы

$$\mathbf{q}_0 = \langle q_{01}, \dots, q_{0m} \rangle^T : \mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^m \text{ и}$$

$$\mathbf{w}_0 = \langle w_{01}, \dots, w_{0n} \rangle^T : \mathbf{w}_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Задана тройка  $\left. \begin{array}{c|c} & \mathbf{w}_0^T \\ \hline \mathbf{q}_0 & A \end{array} \right\}.$

Операторы  $A$  и  $A^+$  задают

$\mathbf{q}_1 = A\mathbf{w}_0$  — прямое отображение и

$\mathbf{w}_1 = A^+\mathbf{q}_0$  — обратное отображение,

где  $A^+$  — оператор, псевдообратный  $A$ .

В общем случае  $\mathbf{q}_1 \neq \mathbf{q}_0$  и  $\mathbf{w}_1 \neq \mathbf{w}_0$ .

Используем Евклидову длину  $\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_1\|$  и  $\|\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_1\|$

как меру несогласованности экспертных оценок.



Согласованными значениями интегрального индикатора и весов показателей будем называть такие значения  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{w}$ , при которых выполняется условие

$$\begin{cases} \mathbf{q} = A\mathbf{w}, \\ \mathbf{w} = A^+\mathbf{q}. \end{cases} \quad (1)$$

Оператором согласования экспертных оценок  $\Phi$ , будем называть оператор

$$\Phi : (\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0, A) \longrightarrow (\mathbf{q}, \mathbf{w}, A),$$

переводящий тройку  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0, A)$  в тройку  $(\mathbf{q}, \mathbf{w}, A)$ , где векторы  $\mathbf{q}, \mathbf{w}$  удовлетворяют условию (1).

---

Пусть  $A : W \longrightarrow Q$ ,  $W \ni \mathbf{w}_0$ ,  $Q \ni \mathbf{q}_0$  и для  $A$  существует псевдообратный оператор

$A^+ : Q \longrightarrow W$ , то есть,  $A^+A = I_n$ ,  $AA^+ = I_m$ ,

$A^+AA^+ = A^+$ ,  $AA^+A = A$ .

Существует сингулярное разложение матрицы  $A$  вида  $A = U\Lambda V^T$ , где  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_R)$ ,  $R = \min(m, n)$ , и  $U^T U = I_m$ ,  $V V^T = I_n$ , причем  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_R$ .

1. Матрица  $A^+ = V^T \Lambda^{-1} U$  является для матрицы  $A$  псевдообратной.

2. Определим  $A^+$  как  $A^+ = V \Lambda_r^{-1} U^T$ ,

где  $\Lambda_r^{-1} = \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_r^{-1}, 0, \dots, 0)$ .

Оператор  $A^+$  является непрерывным в  $r$ -мерном подпространстве.

Пусть  $\mathbf{q}_1 = A\mathbf{w}_0$  и  $\mathbf{w}_1 = A^+\mathbf{q}_0$ . Зададим  $[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_0] \subset Q$  и  $[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_0] \subset W$ . Найдем согласованные оценки на этих отрезках. Для этого найдем выпуклые линейные комбинации векторов  $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1$ , и  $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1$  в виде

$$\begin{aligned} \{\mathbf{w}_\alpha : \mathbf{w}_\alpha &= (1 - \alpha)\mathbf{w}_0 + \alpha A\mathbf{w}_0\} \in [\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1], \\ \{\mathbf{q}_\alpha : \mathbf{q}_\alpha &= \alpha\mathbf{q}_0 + (1 - \alpha)A^+\mathbf{q}_0\} \in [\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1], \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\alpha \in [0, 1]$ .

$$\varepsilon^2 = \|\mathbf{q}_\alpha - \mathbf{q}_0\|^2,$$

$$\delta^2 = \|\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_0\|^2.$$

В качестве критерия выбора параметра  $\alpha$  возьмем условие минимального расстояния между начальными и согласованными оценками в  $Q$  и  $W$ .

$$\frac{\varepsilon^2}{m-1} = \frac{\delta^2}{n-1}. \quad (3)$$

Полученные результаты предлагаются экспертам на обсуждение в следующем виде.

init		$\mathbf{w}_0^T$
	fin	$\mathbf{w}_\alpha^T$
$\mathbf{q}_0$	$\mathbf{q}_\alpha$	$A$



Решение задачи нахождения минимального расстояния от согласованных векторов до векторов экспертных оценок

$$\varepsilon^2 = \|A\mathbf{w} - \mathbf{q}_0\|^2,$$

$$\delta^2 = \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_0\|^2$$

имеет вид

$$\mathbf{w}_\gamma = \arg \min_{\mathbf{w} \in W} (\varepsilon^2 + \gamma^2 \delta^2). \quad (4)$$

Функционал  $(\varepsilon^2 + \gamma^2 \delta^2)$  достигает единственного глобального минимума на множестве  $\mathbf{w}_\gamma \in W$  в точке

$$\mathbf{w}_\gamma = (A^T A + \gamma^2 I)^{-1} (A^T \mathbf{q}_0 + \gamma^2 \mathbf{w}_0). \quad (5)$$

Введено отношение порядка на множестве элементов векторов  $\mathbf{w}_0 = \{w_j : w_1 \leq \dots \leq w_n\}_{j=1}^n$  и  $\mathbf{q}_0 = \{q_i : q_1 \leq \dots \leq q_m\}_{i=1}^m$ , которое задает соответственно конусы  $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^n$  и  $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^m$ .

При нахождении согласованных оценок вводились монотонные корректирующие функции

$$T_{\mathcal{Q}} : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q} \text{ и } T_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}.$$

Найдем такие векторы  $\mathbf{q}_\tau = T_{\mathcal{Q}}(\mathbf{q}_0)$  и  $\mathbf{w}_\tau = T_{\mathcal{W}}(\mathbf{w}_0)$ ,  
что выполняется условие минимума  $A\mathbf{w}_\tau - \mathbf{q}_\tau = \Delta$ .

Для  $k = 0, \dots, K$  укажем такие векторы

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_{k+1} &= T_{\mathcal{W},k}(\mathbf{w}_k, A^+ \mathbf{q}_k), \\ \mathbf{q}_{k+1} &= T_{\mathcal{Q},k}(\mathbf{q}_k, A\mathbf{w}_k),\end{aligned}\tag{6}$$

которые доставляют минимум  $\|\Delta_k\|^2 = \|A\mathbf{w}_k - \mathbf{q}_k\|^2$ .

$T_{\mathcal{Q}} = T_{\mathcal{Q},1} \circ \dots \circ T_{\mathcal{Q},K}$  и  $T_{\mathcal{W}} = T_{\mathcal{W},1} \circ \dots \circ T_{\mathcal{W},K}$ .

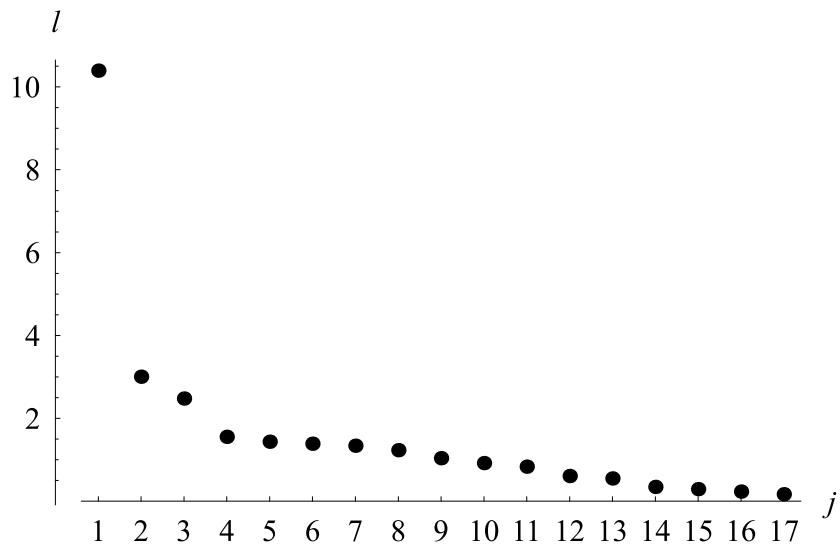
Исходные данные:

1. ежегодные отчеты заповедников РФ,
2. экспертные оценки интегральных индикаторов,
3. экспертные оценки весов показателей,
4. мнения экспертов относительно сопоставимости заповедников и модели порождения данных.

# Сингулярные числа матрицы $A$

---

C-22



Число обусловленности  $\kappa_A = 2700$ .

$\mathbf{q}_0$  — экспертная оценка,

$\mathbf{q}_1 = A\mathbf{q}_0$  — взвешенная сумма,

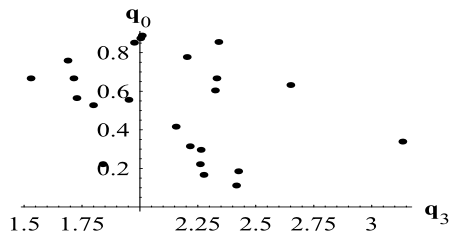
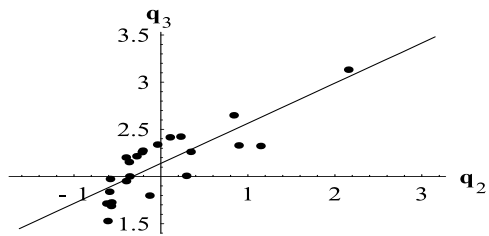
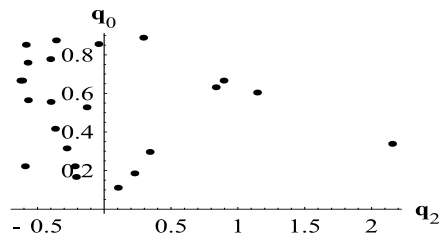
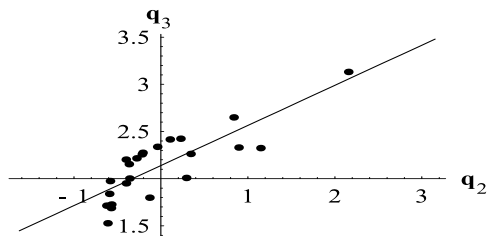
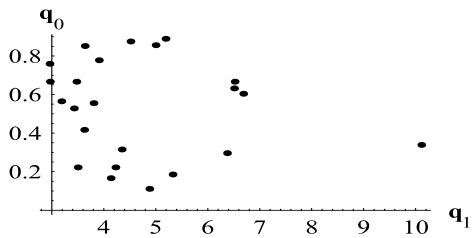
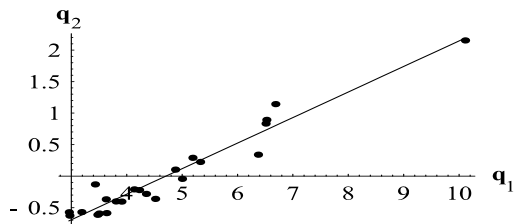
$\mathbf{q}_2 = A\mathbf{s}_1$  — метод главных компонент,

$\mathbf{q}_3 = A\text{diag}(\lambda_1, 0, \dots, 0)$  — метод сингулярных  
векторов,

$\mathbf{q}_\alpha$  —  $\alpha$ -согласование.

# Сопоставление полученных ИИ

C-24

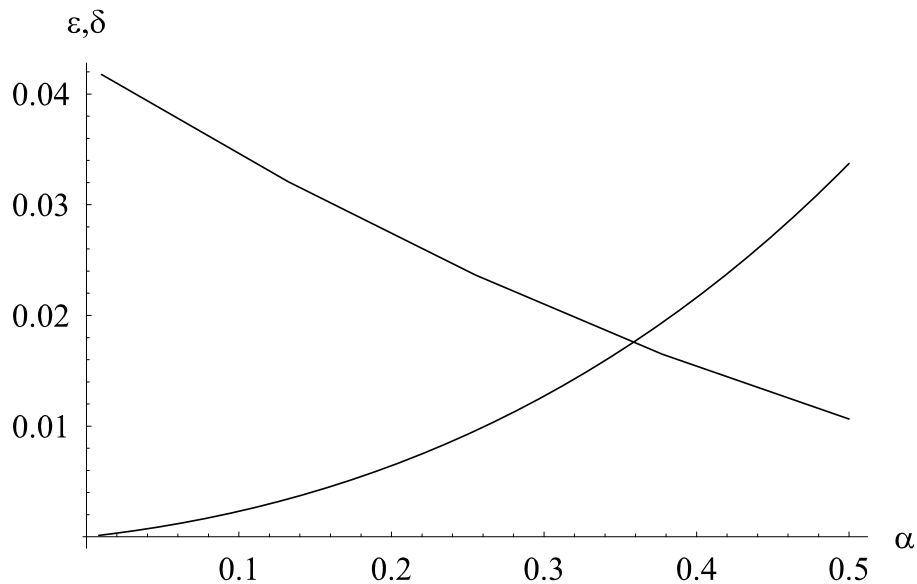




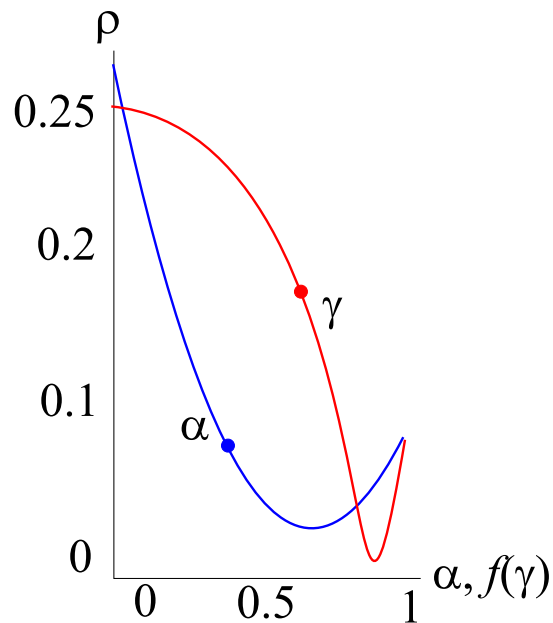
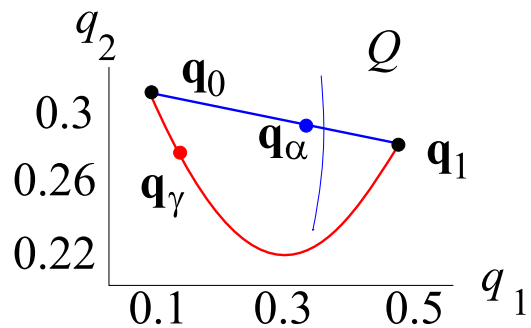
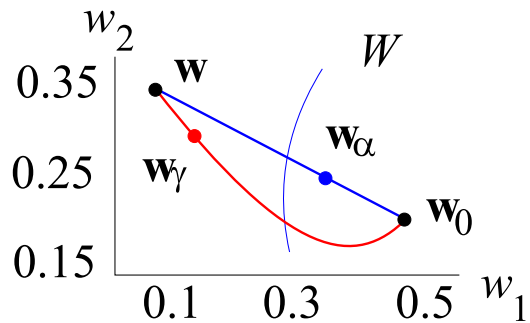
# Зависимость расстояний $\gamma^2, \delta^2$ от $\alpha$

---

C-25



# Сравнение $\alpha$ - и $\gamma^2$ -согласований



Предложен подход, при котором веса показателей и оценки объектов, выставленные экспертами, согласуются с помощью специальной процедуры. Получены обоснованные и адекватные, с точки зрения экспертов, интегральные индикаторы объектов. Получены веса показателей, делающие алгоритм пригодным к использованию без участия экспертов.