СОГЛАСОВАНИЕ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК ПРИ ПОСТРОЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ИНДИКАТОРОВ

В. В. Стрижов

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН

Аннотация

Заданы множество объектов и множество показателей. Каждый объект можно оценить двумя путями: через экспертную оценку объекта и через линейную комбинацию значений показателей объекта, где веса определяются экспертными оценками показателей. В общем случае эти оценки различны.

Описан метод, позволяющий получить непротиворечивые оценки объектов и показателей.

Условные обозначения

$\Upsilon = \{\upsilon_1, ..., \upsilon_m\}$ — множество объектов,

$\Psi = \{\psi_1, ..., \psi_n\}$ — множество показателей,

$A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{m,n}$ — исходные данные, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$\mathbf{q} = \langle q_1, ..., q_m \rangle^T : \mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$ —

вектор интегральных индикаторов объектов,

$\mathbf{w} = \langle w_1, ..., w_n \rangle^T : \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ —

вектор весов показателей.

Определение 1

Интегральным индикатором объекта $\upsilon_i \in \Upsilon$ с номером i называется скаляр $q_i \in \mathbb{R}^1$, поставленный в соответствие набору $\mathbf{a}_{i\cdot}\langle a_{i1}, \ldots, a_{in}\rangle : \mathbf{a}_{i\cdot} \in \mathbb{R}^n$ описаний объекта.

Метод главных компонент

Требуется найти такие коэффициенты $C = \{c_{ij}\}_{i,j}^{n,n}$, что линейные комбинации векторов $\mathbf{z}_{\cdot i} = \tilde{A}\mathbf{c}_{\cdot i}$ обладали бы наибольшей дисперсией

$$\max\left(\frac{\mathrm{D}\mathbf{z}_{\cdot 1} + \mathrm{D}\mathbf{z}_{\cdot 2} + \ldots + \mathrm{D}\mathbf{z}_{\cdot n}}{\mathrm{D}\tilde{\mathbf{a}}_{\cdot 1} + \mathrm{D}\tilde{\mathbf{a}}_{\cdot 2} + \ldots + \mathrm{D}\tilde{\mathbf{a}}_{\cdot n}}\right), \quad i = 1, \ldots, n$$

при ограничениях нормировки $\sum_{i=1}^{m} c_{ij}^2 = 1, j = 1, \ldots, n$ и $\sum_{i=1}^{m} c_{ij}c_{ik} = 0, j, k = 1, \ldots, n, j \neq k$.

Интегральный индикатор $\mathbf{q}_1 = \tilde{A}\mathbf{c}_{\cdot 1}$.

Расслоение Парето

Представим описания $S = \{\mathbf{a}_{i\cdot} : i \in \{1, ..., m\}\}$ в виде $T = \bigcup_{\zeta=1}^{l} S_\zeta, \quad S_\zeta \cap S_\eta = \emptyset,$ если $\zeta = \eta$.

Определим для всех $\zeta = 1, ..., l$ множество S_ζ как

$$S_\zeta = \{\mathbf{a}_{\xi\cdot} : \mathbf{a}_{\xi\cdot} \notin S_{\zeta-1}, \forall i \in \{1, ..., m\},$$
$$i \neq \xi \exists j \in \{1, ..., n\} : a_{\xi j} \geqslant a_{ij}\}_{\xi=1}^{m}.$$

Поставим в соответствие каждому вектору $\mathbf{a}_{\xi\cdot} \in S_\zeta$ индекс ζ. Полученное множество приведем к виду

$$\mathbf{q}_2 = \{\max(\{\zeta_\xi\}_{\xi=1}^{m}) - \zeta_\xi\}_{\xi=1}^{m}.$$

Исходные данные — тройка $(\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0, A)$

Экспертами заданы векторы

$\mathbf{q}_0 = \langle q_{01}, ..., q_{0m} \rangle^T : \mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^m$ и

$\mathbf{w}_0 = \langle w_{01}, ..., w_{0n} \rangle^T : \mathbf{w}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Задана тройка $\begin{array}{c|c} & \mathbf{w}_0^T \\ \hline \mathbf{q}_0 & A \end{array}$.

Несогласованность экспертных оценок

Операторы A и A^+ задают

$\mathbf{q}_1 = A\mathbf{w}_0$ — прямое отображение и

$\mathbf{w}_1 = A^+\mathbf{q}_0$ — обратное отображение,

где A^+ — оператор, псевдообратный A.

В общем случае $\mathbf{q}_1 \neq \mathbf{q}_0$ и $\mathbf{w}_1 \neq \mathbf{w}_0$.

Используем Евклидову длину $\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_1\|$ и $\|\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_1\|$

как меру несогласованности экспертных оценок.

Определение 2

Согласованными значениями интегрального индикатора и весов показателей будем называть такие значения $\mathbf{q}$ и $\mathbf{w}$, при которых выполняется условие

$$\begin{cases} \mathbf{q} = A\mathbf{w}, \\ \mathbf{w} = A^{+}\mathbf{q}. \end{cases} \qquad (1)$$

Определение 3

Оператором согласования экспертных оценок Φ, будем называть оператор

$$\Phi : (\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0, A) \longrightarrow (\mathbf{q}, \mathbf{w}, A),$$

переводящий тройку $(\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0, A)$ в тройку $(\mathbf{q}, \mathbf{w}, A)$, где векторы $\mathbf{q}, \mathbf{w}$ удовлетворяют условию (1).

α-согласование

Пусть $A : W \longrightarrow Q$, $W \ni \mathbf{w}_0$, $Q \ni \mathbf{q}_0$ и для A существует псевдообратный оператор $A^+ : Q \longrightarrow W$, то есть, $A^+A = I_n$, $AA^+ = I_m$, $A^+AA^+ = A^+$, $AA^+A = A$.

Теорема (Дж. Форсайт)

Существует сингулярное разложение матрицы A вида $A = U\Lambda V^T$, где $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_R)$, $R = \min(m, n)$, и $U^T U = I_m, V V^T = I_n$, причем $\lambda_1 \geqslant ... \geqslant \lambda_R$.

Утверждения

1. Матрица $A^+ = V^T\Lambda^{-1}U$ является для матрицы A псевдообратной.

2. Определим A^+ как $A^+ = V\Lambda_r^{-1}U^T$,

где $\Lambda_r^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1^{-1}, ..., \lambda_r^{-1}, 0, ..., 0)$.

Оператор A^+ является непрерывным в r-мерном подпространстве.

Получение согласованных оценок

Пусть $\mathbf{q}_1 = A\mathbf{w}_0$ и $\mathbf{w}_1 = A^+\mathbf{q}_0$. Зададим $[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_0] \subset Q$ и $[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_0] \subset W$. Найдем согласованные оценки на этих отрезках. Для этого найдем выпуклые линейные комбинации векторов $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1$, и $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1$ в виде

$$\begin{aligned} \{\mathbf{w}_\alpha : \mathbf{w}_\alpha \ &= \ (1-\alpha)\mathbf{w}_0 + \alpha A\mathbf{w}_0\} \ \in \ [\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1], \\ \{\mathbf{q}_\alpha : \mathbf{q}_\alpha \ &= \ \alpha\mathbf{q}_0 + (1-\alpha)A^+\mathbf{q}_0\} \ \in \ [\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1], \end{aligned} \tag{2}$$

где $\alpha \in [0, 1]$.

Назначение параметра α

$$\varepsilon^2 = \|\mathbf{q}_\alpha - \mathbf{q}_0\|^2,$$

$$\delta^2 = \|\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_0\|^2.$$

В качестве критерия выбора параметра α возьмем условие минимального расстояния между начальными и согласованными оценками в Q и W.

$$\frac{\varepsilon^2}{m-1} = \frac{\delta^2}{n-1}. \tag{3}$$

Изменение параметра α

Полученные результаты предлагаются экспертам на обсуждение в следующем виде.

init		$\mathbf{w}_0^T$
	fin	$\mathbf{w}_\alpha^T$
$\mathbf{q}_0$	$\mathbf{q}_\alpha$	A

γ^2-согласование

Решение задачи нахождения минимального расстояния от согласованных векторов до векторов экспертных оценок

$$\varepsilon^2 = \|A\mathbf{w} - \mathbf{q}_0\|^2,$$

$$\delta^2 = \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_0\|^2$$

имеет вид

$$\mathbf{w}_\gamma = \arg\min_{\mathbf{w}\in W}(\varepsilon^2 + \gamma^2\delta^2). \tag{4}$$

Нахождение согласованных оценок

Функционал $(\varepsilon^2 + \gamma^2\delta^2)$ достигает единственного глобального минимума на множестве $\mathbf{w}_\gamma \in W$ в точке

$$\mathbf{w}_\gamma = (A^T A + \gamma^2 I)^{-1}(A^T \mathbf{q}_0 + \gamma^2 \mathbf{w}_0). \qquad (5)$$

Введено отношение порядка на множестве элементов векторов $\mathbf{w}_0 = \{w_j : w_1 \leqslant \ldots \leqslant w_n\}_{j=1}^{n}$ и $\mathbf{q}_0 = \{q_i : q_1 \leqslant \ldots \leqslant q_m\}_{i=1}^{m}$, которое задает соответственно конусы $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^m$.

При нахождении согласованных оценок вводились монотонные корректирующие функции

$T_{\mathcal{Q}} : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q}$ и $T_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}$.

τ-согласование

Найдем такие векторы $\mathbf{q}_\tau = T_\mathcal{Q}(\mathbf{q}_0)$ и $\mathbf{w}_\tau = T_\mathcal{W}(\mathbf{w}_0)$, что выполняется условие минимума $A\mathbf{w}_\tau - \mathbf{q}_\tau = \Delta$.

Для $k = 0, ..., K$ укажем такие векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{k+1} &= T_{\mathcal{W},k}(\mathbf{w}_k, A^+\mathbf{q}_k), \\ \mathbf{q}_{k+1} &= T_{\mathcal{Q},k}(\mathbf{q}_k, A\mathbf{w}_k), \end{aligned} \tag{6}$$

которые доставляют минимум $\|\Delta_k\|^2 = \|A\mathbf{w}_k - \mathbf{q}_k\|^2$.

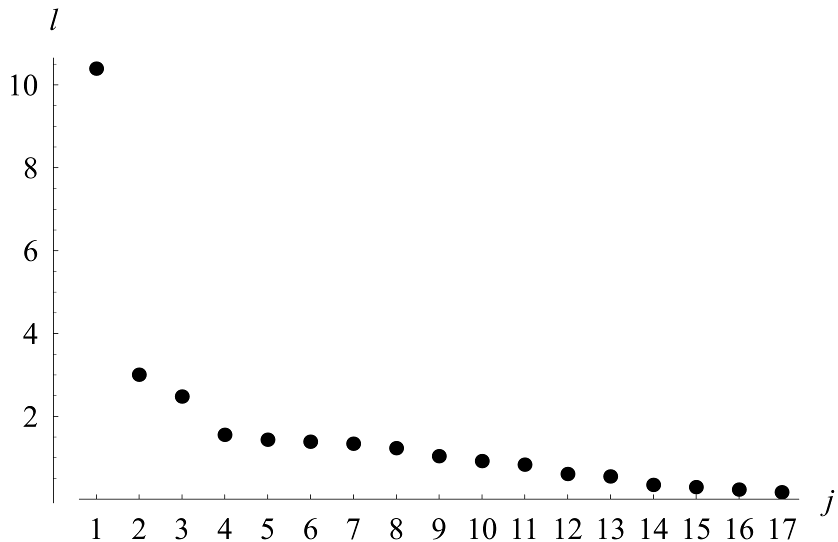
$T_\mathcal{Q} = T_{\mathcal{Q},1} \circ ... \circ T_{\mathcal{Q},K}$ и $T_\mathcal{W} = T_{\mathcal{W},1} \circ ... \circ T_{\mathcal{W},K}$.

Практические результаты

Исходные данные:

1. ежегодные отчеты заповедников РФ,
2. экспертные оценки интегральных индикаторов,
3. экспертные оценки весов показателей,
4. мнения экспертов относительно сопоставимости заповедников и модели порождения данных.

Сингулярные числа матрицы A



Число обусловленности $æ_A = 2700$.

Методы получения ИИ

$\mathbf{q}_0$ — экспертная оценка,

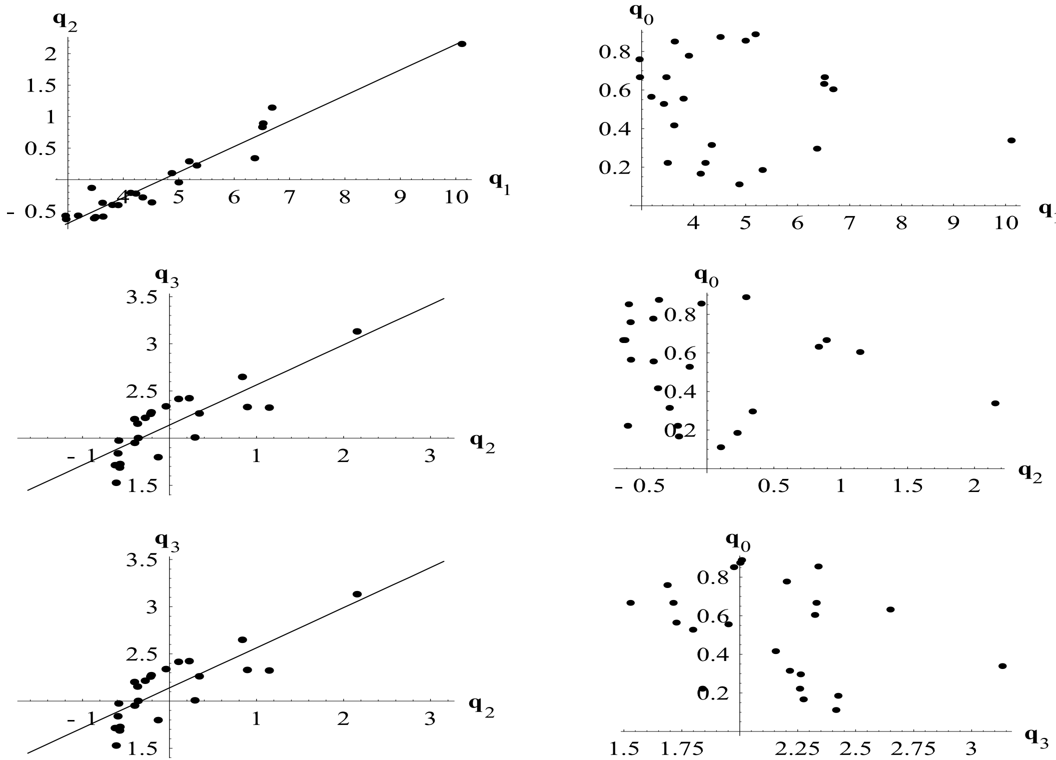
$\mathbf{q}_1 = A\mathbf{q}_0$ — взвешенная сумма,

$\mathbf{q}_2 = A\mathbf{c_1}$ — метод главных компонент,

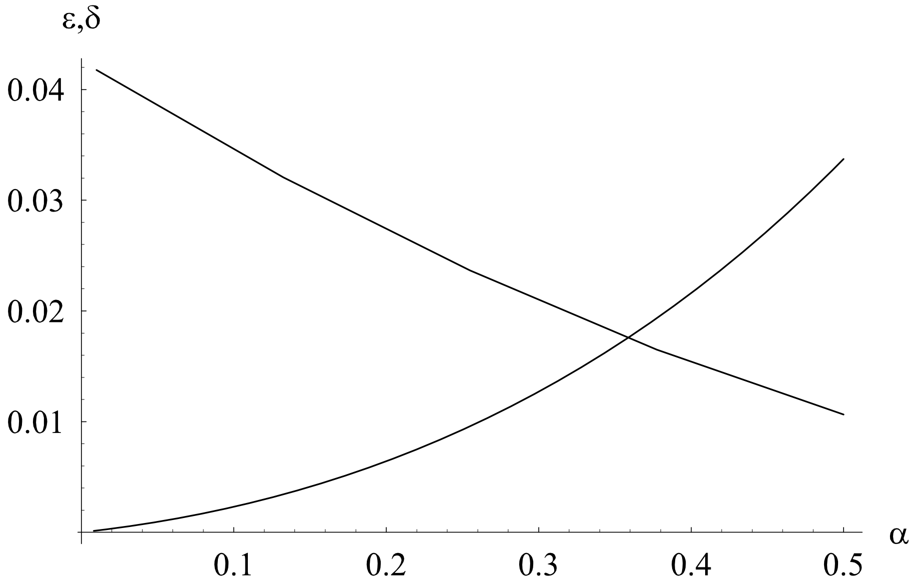
$\mathbf{q}_3 = A\mathrm{diag}(\lambda_1, 0, ..., 0)$ — метод сингулярных векторов,

$\mathbf{q}_\alpha$ — α-согласование.

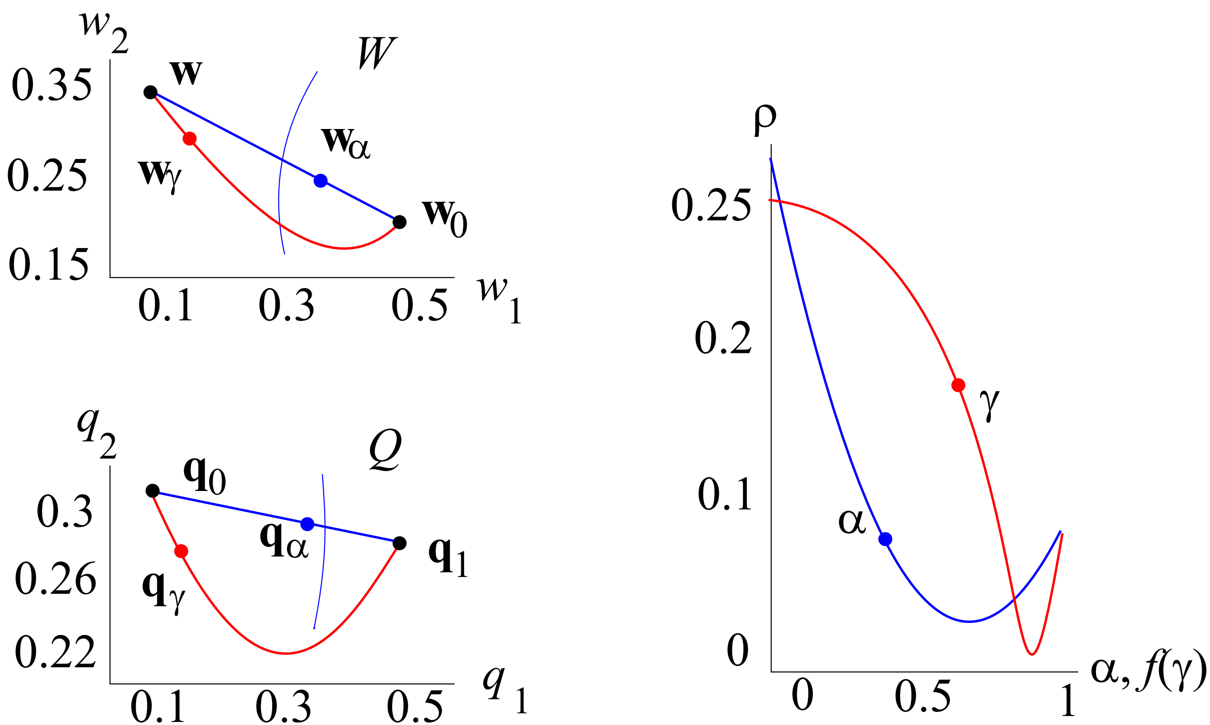
Сопоставление полученных ИИ



Зависимость расстояний γ^2, δ^2 от α



Сравнение α- и γ^2-согласований



Заключение

Предложен подход, при котором веса показателей и оценки объектов, выставленные экспертами, согласуются с помощью специальной процедуры. Получены обоснованные и адекватные, с точки зрения экспертов, интегральные индикаторы объектов. Получены веса показателей, делающие алгоритм пригодным к использованию без участия экспертов.